المعادلات الجبرية من الدرجة الثانية، الثالثة و الرابعة

تدرّس حلول المعادلات التربيعية في المرحلة الثانوية ولكن المعادلات التكعيبية و الرباعية لا تدرس حتى في الجامعات وهذا يعود لكون صياغة حلولها غاية في التعقيد.

لهذا ارتأينا أنه من المفيد شرح كيفية حل هذه المعادلات بطريقة بسيطة و من جهة أخرى نبيّن من خلال ذلك الدور البارز لبعض علماء المسلمين السابقين في هذا الموضوع الذين للأسف لم ينصفهم التاريخ المكتوب.

أسلوبنا هنا يعتمد على عرض الطريقة العامة للوصول إلى الحل دون الخوض في التفاصيل و الحالات الخاصة كما أننا لن نتعرض إلى التاريخ فهذا موضوع آخر لا تسعه هذه الصفحات.

يكتب الشكل العام لمعادلة جبرية من الدرجة n ذات المجهول x كالآتي:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0. \qquad (1)$$

حيث القيم a_i ثابتة (حقيقية أو مركبة) و $a_n \neq 0$.

نقول إن المعادلة من الدرجة الثانية إذا كان $n = 2$, من الدرجة الثالثة إذا كان $n = 3$, من الدرجة الرابعة إذا كان $n = 4$...

من المعروف أن المعادلة (1) تملك دوما n حلا مركبا، لكن لا توجد أية خوارزمية عامة لهذه الحلول إلا عندما يكون $n \leq 4$ أو في حالات خاصة أخرى. مثلا النظرية المسماة بـ "نظرية الجذر النسبي" تساعد على إيجاد الحلول النسبية (إذا وجدت) مهما كانت الدرجة n وتفصيلا:

إذا كانت معاملات المعادلة (1) أعدادا صحيحة و $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$. فإن أي حل نسبي (إن وجد) للمعادلة (1) من الشكل $x = \dfrac{p}{q}$ (حيث p و q أوليّان فيما بينهما) يحقق : p قاسم لـ $\pm a_0$ و q قاسم لـ $\pm a_n$.

وعلى سبيل المثال لنبحث عن حلول المعادلة:

$$x^3+12x^2-16x-312=0.$$

القيم النسبية المرشحة لتكون حلولا هي $\pm\frac{2}{1},\ \pm\frac{3}{1},\ \pm\frac{4}{1},\ \pm\frac{6}{1},\ \pm\frac{8}{1},\ \pm\frac{13}{1},....$ و بالتعويض نرى أن $x=-6$ يمثل حلا فعليا للمعادلة. و باستخدام القسمة الإقليدية على $x+6$ نجد أن الحلين المتبقيين هما $x=-3\pm\sqrt{61}$.

فيما يلي سنرى أنه يمكن دوما إيجاد كل الحلول (الحقيقية أو المركبة) لكل معادلات كثير الحدود من الدرجة $n\le 4$.

1. معادلات كثير الحدود من الدرجة الثانية:

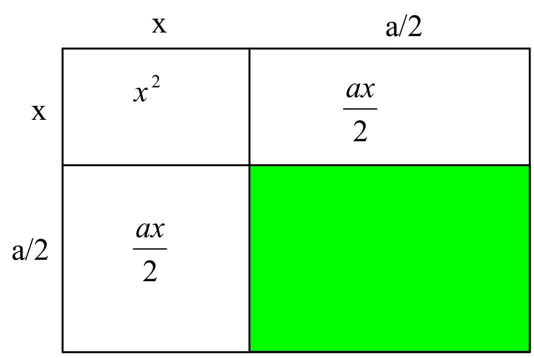
يكتب الشكل العام لمعادلة كثيرحدود من الدرجة الثانية ذات المجهول x كالأتي:

$$\mathrm{A}x^2+Bx+C=0. \qquad \textbf{(2)}$$

يمكن دوما صياغة هذه المعادلة على النحو:

$$x^2+ax=b.$$

محمد بن موسى الخوارزمي (هو أبو جعفر محمد بن موسى الخوارزمي، عاش ببغداد (164هـ/780م – 235هـ/849م) وتوفي هناك) حل هذه المعادلة بطريقة هندسية جميلة في حالة ما إذا كانت $x>0, a>0, b>0$. و التي تسمى في أيامنا هذه بطريقة إتمام المربع كالآتي (باستخدام الرموز الحديثة):



مساحة المربع الكبير تساوي من جهة $(x+\frac{a}{2})^2$ و من جهة أخرى فهي تساوي $x^2+ax+(\frac{a}{2})^2$ أو $b+(\frac{a}{2})^2$.

ومنه نستنتج بسهولة الحلول $x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{b+(\frac{a}{2})^2}$.

الجزء الجبري من الحل الماضي يعمّم بسهولة و دون أي تغيير ليغطي كل الحالات المتبقية من الأعداد الحقيقية أو المركبة (حل جبري).

ولنلاحظ كيف كانت الهندسة الفكرة الأساسية وراء هذا الحل. و زد على ذلك أن حل معادلات كثير الحدود من الدرجة الثانية على بساطته فهو أساس حل معادلات كثير الحدود من الدرجة الثالثة و الرابعة كما سنرى ... فجازى الله محمد بن موسى الخوارزمي عنا خيرا.

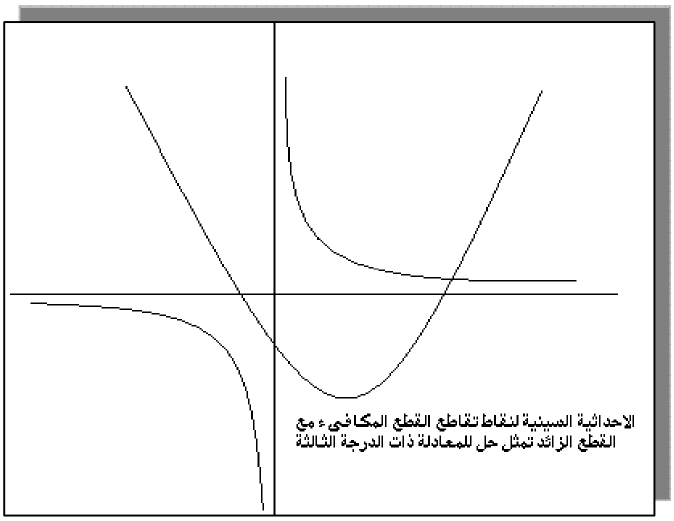
2. معادلات كثير الحدود من الدرجة الثالثة:

يكتب الشكل العام لمعادلة كثير حدود من الدرجة الثالثة ذات المجهول x كالأتي:

$$\mathrm{A}x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0. \tag{3}$$

دعنا نتطرق أولا لطريقة عمر الخيام الهندسية (هو أبو الفتح عمر بن إبراهيم الخيام النيسابوري (436هـ/1044م – 517 هـ/1123م)).

لاحظ أولا أن $x = 0$ يكون حلا للمعادلة (3) إذا وفقط إذا كان $D = 0$, وعليه نفترض أن $D \neq 0$ و بالتالي فإن $x = 0$ ليس حلا. بقسمة الطرفين على x نحصل على المعادلة $\mathrm{A}x^2 + Bx + C = -\dfrac{D}{x}$. و هذا يعني أن x يساوي الإحداثية x لنقطة التقاطع بين القطع المكافئ (parabola) $\mathrm{y} = \mathrm{A}x^2 + Bx + C$ و القطع الزائدي (hyperbola) $y = -\dfrac{D}{x}$.



ينبغي أن ننبه هنا إلى أن هذه الطريقة في إيجاد الحلول مستوحاة من أعمال عمر الخيام (الذي ناقش في الحقيقة 25 حالة حسب إشارات A, B, C, D و كونها مساوية للصفر أو لا واقترح حلولا هندسية مناسبة لكل حالة).

بجدر بنا أن نذكر و نحن في عصر الكمبيوتر أن طريقة الخيام يمكن أن تستخدم على الحاسوب (أو حتى على آلة حاسبة لديها خاصية الرسم) لإيجاد (تقريب) الحلول الحقيقية لمعادلات كثير الحدود من الدرجة الثالثة بسرعة و سهولة.

- **خوارزمية المعادلات لكثير الحدود من الدرجة الثالثة:**

بقسمة المعادلة (3) على A نحصل على معادلة من الشكل:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

و على طريقة الخوارزمي الجبرية في اتمام المربع, دعنا هنا نكمل المكعب، و هذا يمكننا من التخلص من المعامل a كالتالي:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x + \frac{a}{3})^3 - \frac{a^2}{3}x - \frac{a^3}{27} + bx + c.$$

و بتغيير المجهول من x إلى $y = x + \frac{a}{3}$ تأخذ معادلتنا الشكل التالي:

$$y^3 + dy + e = 0.$$

التعويض $y = z - \frac{d}{3z}$ المنسوب إلى فيات Viète يسمح لنا بتحويل المعادلة السابقة إلى معادلة من الدرجة الثانية في z^3 على النحو التالي:

$$y^3 + dy + e = (z^3)^2 + ez^3 - \frac{d^3}{27}.$$

ومنه نحصل على قيمتين (حقيقية أو مركبة) للمجهول z^3 بالطريقة المشروحة في الفصل الماضي, و بأخذ الجذر التكعيبي نحصل على ستّ قيم (حقيقية أو مركبة) للمجهول z ومن ثم نحصل فقط على ثلاث (لماذا؟) قيم للمجهول $y = z - \frac{d}{3z}$ و بالتالي على الحلول المرغوبة x.

مثال: لتكن لدينا معادلة الفصل الأول:

$$x^3 + 12x^2 - 16x - 312 = 0.$$

بتغيير المجهول من x إلى $y = x + 4$ تأخذ معادلتنا الشكل التالي:

$$y^3 - 64y - 120 = 0.$$

التعويض $y = z + \frac{64}{3z}$ يحول المعادلة ذات الدرجة الثالثة إلى معادلة من الدرجة الثانية:

$$(z^3)^2 - 120(z^3) + \frac{(64)^3}{27} = 0.$$

ومنه $z^3 = 60 \pm \frac{52\sqrt{61}}{3\sqrt{3}}i$. من المعروف أنه يكفي أن نستخرج جذرا واحدا تكعيبيا حتى نحصل على بقية الجذور. في حالتنا هذه العدد المركب $z = -1 - \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{3}}i$ جذر تكعيبي للعدد $z^3 = 60 + \frac{52\sqrt{61}}{3\sqrt{3}}i$ (ينبغي أن نوضح هنا أن إيجاد أي من الجذور التكعيبية لعدد مركب في شكله الجبري ليس بالأمر الهين، لهذا عادة ما نلجأ إلى الشكل المثلثي و من ثم نستخدم قانون دوموافر De Moivre).

و عليه يكون $y = z + \frac{64}{3z} = -2$ و منه $x = y - 4 = -6$. للحصول على بقية الحلول نستخدم إما القسمة الإقليدية أو نواصل بنفس الطريقة السابقة و نعين بقية الجذور التكعيبية لـ $z = -1 - \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{3}}i$ ومن ثم y و بعدها x.

الحلول المتبقية تساوي $x = -3 \pm \sqrt{61}$.

3. معادلات كثير الحدود من الدرجة الربعة:

يكتب الشكل العام لمعادلة كثير حدود من الدرجة الرابعة ذات المجهول x كالأتي:

$$\mathrm{A}x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0. \qquad \textbf{(4)}$$

بقسمة المعادلة (4) على A نحصل على معادلة من الشكل:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

وهنا أيضا على منوال الخوارزمي الجبري نكمل الرباعية و بالتالي نتخلص من المعامل a كالأتي:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x + \frac{a}{4})^4 + (b - \frac{3a^2}{8})x^2 + (c - \frac{a^3}{16})x + d - \frac{a^4}{256}.$$

و بتغيير المجهول من x إلى $y = x + \frac{a}{4}$ تأخذ معادلتنا الشكل التالي:

$$y^4 = ey^2 + fy + g.$$

نفكر الآن في إكمال المربع من الجهتين في نفس الوقت. و بالتالي دعنا نضيف إلى الطرفين القيمة $uy^2 + \frac{u^2}{4}$ حيث u مجهول يجب تعيينه. إذن نحصل على:

$$(y^2 + \frac{u}{2})^2 = (e+u)y^2 + fy + g + \frac{u^2}{4}. \qquad \textbf{(5)}$$

الطرف الأيمن يكون مربعا تاما إذا كان مميزه مساويا للصفر و هذا يعني أن:

$$f^2-4(e+u)(g+\frac{u^2}{4})=0.$$

أو بصيغة أخرى

$$u^3+eu^2+4gu+4eg-f^2=0.$$

و هي عبارة عن معادلة كثير حدود من الدرجة الثالثة يمكن حلها كما شرحنا سابقا. نختار حلا واحدا u ونعوضه في المعادلة (5) فيصبح كلا طرفيها مربعا تاما وبالتالي يمكن إيجاد الحلول الأخرى بكل سهولة.

مثال: دعنا نطبق ما سبق لحل المعادلة التالية:

$$x^4+8x^3+12x^2+(2\sqrt{30}-16)x+(4\sqrt{30}-28)=0.$$

نأخذ $y=x+2$ أو $x=y-2$ فنتخلص من معامل x^3 ونحصل على :

$$y^4=12y^2-2\sqrt{30}y-4.$$

نضيف لكلا الطرفين القيمة $\mathrm{uy}^2+\frac{u^2}{4}$ وهذا بقصد إكمال المربع في الطرفين (حيث u مجهول يجب تعيينه):

$$(\mathrm{y}^2+\frac{u}{2})^2=(12+u)y^2-2\sqrt{30}y-4+\frac{u^2}{4}.$$

إن الطرف الأيمن يصير مربعا تاما إذا كان مميزه مساويا للصفر ومنه ينبغي اختيار u بحيث:

$$u^3+12u^2-16u-312=0.$$

هذه الأخيرة هي عبارة عن معادلة من الدرجة الثالثة قد سبق ذكر حلها في بداية المطوية و رأينا أن $u=-6$ حلا للمعادلة. بالتعويض في المعادلة نجد أن:

$$(y^2-3)^2=(\sqrt{6}y-\sqrt{5})^2.$$

و بالتالي :

$$y^2-3=\pm(\sqrt{6}y-\sqrt{5}).$$

و منه نجد الحلول الأربعة للمجهول y بحل المعادلات ذوات الدرجة الثانية و من ثم نحصل على حلول المعادلة ذات الدرجة الرابعة الأصلية كالأتي:

$$x=\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{-4\sqrt{5}+18}}{2}-2 \text{ و } x=\frac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{4\sqrt{5}+18}}{2}-2.$$

بعض المراجع في الموضوع

1) Adnan Baki, Al Khawarizmi's contributions to the science of mathematics: Al kitab Al jabr wa'l muqabalah, Journal of Islamic Academy of Sciences 5:3, 225-228, 1992
http://www.medicaljournal-ias.org/5_3/Baki.pdf
2) Barry Dayton, Theory of equations (lesson 9).
http://www.oakton.edu/user/~barryd/theq/textpart9.pdf
3) David W. Henderson، Geometric Solutions of Cubic and Quadratic Equations, *Pythagoras*, 1994.
http://www.math.cornell.edu/~dwh/papers/geomsolu/geomsolu.html
4) June Jones, Omar Khayyam and a Geometric Solution of the Cubic
http://jwilson.coe.uga.edu/emt669/Student.Folders/Jones.June/Omar/Omarpaper.html
5) Mardia, K.V.,
Omar Khayyam, Rene Descartes and solutions to algebraic equations.
Grattan-Guinness, Ivor (ed.) et al., History of the mathematical sciences.
http://www.maths.leeds.ac.uk/~sta6kvm/omar.pdf
6) منذر بن راشد؛ علم الجبر، (power point presentation)
http://faculty.kfupm.edu.sa/MATH/monther/index_files/Math305/2.5.ppt

تم الفراغ منه بحمد الله بتاريخ الجمعة 26 ديسمبر 2008

في مدينة عيسى بالبحرين.

كتبه محمد العربي اللبي

E-mail: labbi@sci.uob.bh